1. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1.1 Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x różnej od zera takiej, że $x^6 - \frac{1}{x^6} > 1$, prawdziwa jest nierówność $x^{18} + \frac{1}{x^{18}} > 2x^6 + \frac{2}{x^6}$.

1.2 Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego wartości wyrażenia $\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)$.

1.3 Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $x^3 + \frac{60}{x} > 36$.

1.4 Wykaż, że liczba $(n+2)^4 - n^4$ jest podzielna przez 16, jeśli n jest liczbą naturalną.

1.5 Oblicz wartość wyrażenia $a + b$, jeśli: $a = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 - \log_3 12$; $b = \sin 15°$.

1.6 Wykaż, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$, jeżeli $x + y + z = 0$, to
$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = xyz.$$

1.7 Wykaż, że jeżeli $x \neq 0$, to $x^4 + \frac{250}{x^2} \geq 75$.

1.8 Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b spełniających warunek $a \cdot b = 1$, prawdziwa jest nierówność $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

1.9 Reszta z dzielenia liczby 638 przez liczbę naturalną n jest równa 8, zaś reszta z dzielenia liczby 205 przez tę samą liczbę naturalną n jest równa 7. Znajdź liczbę n.

2. FUNKCJE I RÓWNANIA

2.1 Rozwiązaniem równania $x\log_5 9 + 2x = \frac{\log_3 15}{\log_3 5}$ jest liczba

2.2 Dana jest funkcja:
$$f(x) = \begin{cases} 2|x| - 4 & x \leq 2 \\ \big||x-3| - 1\big| & x > 2 \end{cases}.$$
Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dokładnie trzy rozwiązania?

2.3 Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{(x^2-3)^2 - 4}{x^3 + 1} \geq 0$ jest

2.4 Iloczyn pierwiastków równania $|x^2 - 25| - |2x - 10| = 0$ jest równy

2.5 Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ w przedziale $\left\langle \frac{3}{2}; 4 \right\rangle$ jest równa

3. FUNKCJA KWADRATOWA

3.1 Równanie $|-x^2 + 6x + 2| = k$ ma trzy rozwiązania. Wynika stąd, że k jest równe

3.2 Wyznacz liczbę k tak, aby suma odwrotności różnych pierwiastków równania $kx^2 + 2kx + k = x^2 + 2$ była nie mniejsza niż 1.

3.3 Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - mx + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste dodatnie x_1 i x_2 takie, że zachodzi nierówność $x_1^3 + x_2^3 > x_1 + x_2$.

3.4 Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 - (m+1)x - m = 0$ dwa różne pierwiastki spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 2$?

4. WIELOMIANY

4.1 Wyznacz największy pierwiastek równania $2x^3 - 7x + 2 = 0$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku tego pierwiastka.

4.2 Dany jest wielomian $W(x) = x(x-2)(x-4)$. Wyznacz rozwiązania nierówności: $\frac{W(x)}{W(2x)} \le -\frac{1}{8}$.

4.3 Dla jakich wartości parametru a równanie $(x+1)\left(x^2-(a+1)x+a\right)=0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, których suma kwadratów jest równa 6?

4.4 Dana jest funkcja $f(x) = mx^3 - 3x^2 + 3mx + 1$. Funkcja $g(m)$ przypisuje każdej wartości parametru m liczbę ekstremów, jaką ma funkcja f dla tego parametru m. Wyznacz wzór oraz naszkicuj wykres funkcji g.

4.5 Wielomian $W(x) = x^3 + px + q$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 2x^2 + x - 1$. Wyznacz p i q. Rozwiąż nierówność $W(x-2) \le 0$.

4.6 Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 12x^2 + px + q$, wiedząc, że ich stosunek jest równy 1:2:3. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności sumy ich sześcianów.

4.7 Dla jakich wartości parametru $m \in \boldsymbol{R}$ równanie $(2m^2 + m - 1)x^3 + (5-m)x^2 - 6x = 0$ ma trzy różne pierwiastki, które tworzą ciąg arytmetyczny?

5. CIĄGI

5.1 Jednym z rozwiązań równania $\left|\frac{x-2}{2}\right| + \left|\frac{x-2}{4}\right| + \left|\frac{x-2}{8}\right| + \ldots = 4$, gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego, jest liczba

5.2 Dana jest granica $\frac{x^2-(p+1)x+p}{x-1} = \frac{1}{3}$. Zakoduj cyfrę jedności oraz pierwszą i drugą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby p.

5.3 Oblicz $\sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+1}{n}}{\frac{2n}{1\cdot 2} + \frac{2n}{2\cdot 3} + \frac{2n}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2n}{(n-1)\cdot n}}}$.

6. TRYGONOMETRIA

6.1 Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x - 1 = 0$, gdzie $x \in (0, 2\pi)$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwiązania.

6.2 Równania $\sqrt{3}\,\sin x + \cos x = 1 - m$ ma rozwiązanie. Wynika stąd, że

6.3 Uzasadnij, że dla $0^\circ < x < 45^\circ$ prawdziwa jest nierówność:

$$2(\sin^3 x - \cos^3 x) < \sin x - \cos x.$$

6.4 Rozwiąż równanie $\sin(10x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(5x)}$ w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6.5 Wykaż, że jeżeli między miarami kątów α, β, γ w trójkącie zachodzi związek $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(1-\cos\gamma)$, to trójkąt jest równoramienny.

6.6 Rozwiąż nierówność: $2\sin^2 x + \sin x\cos x + 3\cos^2 x \le 3 \wedge x \in \langle 0; \pi\rangle$

6.7 Liczba rozwiązań równania $2\cos^4 x - 2\sin^4 x = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest równa

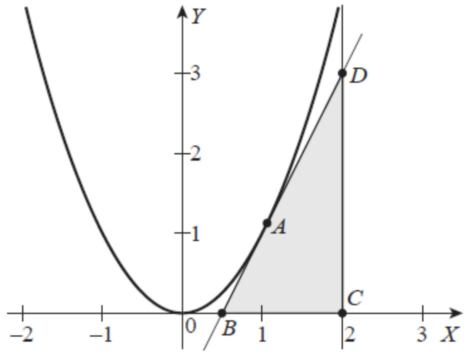
6.8 Rozwiąż równanie $\sin 7x + \frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x = 0$.

7. GEOMETRIA ANALITYCZNA

7.1 Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 2x + 4$. Do wykresu funkcji poprowadzono styczne w punktach $A = (0, 4)$ i $B = (-3, 7)$ przecinające się w punkcie C. Oblicz pole trójkąta ABC.

7.2 Na paraboli $f(x) = -x^2 + 9$ obrano punkt A o dodatnich współrzędnych. Punkt B jest obrazem punktu A w symetrii względem osi OY, zaś punkty C i D rzutami punktów A i B na oś OX. Wyznacz współrzędne punktu A tak, aby pole prostokąta $ABCD$ było największe.

7.3 Dany jest punkt $A = (a, b)$ leżący na paraboli $f(x) = x^2$ dla którego $1 \leq a \leq 2$. Punkt B jest punktem przecięcia stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie A z osią OX, $C = (2, 0)$ oraz punkt D jest punktem przecięcia prostej $x = 2$ ze styczną (zobacz rysunek). Dla jakiego punktu A pole trójkąt BCD jest największe, a dla jakiego A pole to jest najmniejsze?



7.4 Dany jest okrąg o środku $O = (2, 2)$ i promieniu $r = 2$ oraz styczna do tego okręgu w punkcie A, którego współrzędne są liczbami dodatnimi. Styczna ta przecina oś OX w punkcie $B = (6, 0)$. Wyznacz współrzędne punktu A.

7.5 Dla jakich wartości parametru m okręgi o równaniach
$x^2 + y^2 = m^2 - 2m + 1$ i $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4m^2$
są styczne zewnętrznie?

7.6 Krzywe $(x + 3)^2 + y^2 = 9$ i $|x| - y + 1 = 0$ przecinają się w punktach A i B. Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez punkty A, B i środek S okręgu. Wykonaj rysunek.

7.7 Wyznacz współrzędną wierzchołka C trójkąta ABC, jeśli wiadomo, że $A = (1, -1)$, $B = (4, 2)$ oraz wysokość opuszczona na bok AB ma długość $2\sqrt{2}$ i zawiera się w prostej o równaniu $y = -x + 2$.

7.8 Wykaż, że styczne do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 3}$ poprowadzone w punktach, których rzędna jest równa 1, są prostopadłe.

7.9 Okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ po przekształceniu przez symetrię środkową względem punktu $A = (5,1)$ określa się równaniem

7.10 Wyznacz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 34x - 28y + 385 = 0$. Rozpatrz wszystkie przypadki.

8. PLANIMETRIA

8.1 Dane są okręgi o promieniach R i r styczne zewnętrznie. Do tych okręgów poprowadzono wspólną styczną. Wykaż, że pole czworokąta wyznaczonego przez środki tych okręgów i punkty styczności okręgów ze styczną jest równe $(R + r)\sqrt{R \cdot r}$.

8.2 Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na boku AB obrano punkt D dzielący bok AB w stosunku 3 : 2. Wyznacz sinus kąta ACD.

8.3 Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 8$, $|AC| = 6$ i $|BC| = 4$. Wykaż, że miara kąta BAC jest mniejsza niż $30°$.

8.4 W trapez równoramienny $ABCD$ wpisano okrąg o środku O. Pokaż, że średnia arytmetyczna długości podstaw trapezu $ABCD$ jest równa $\sqrt{|OA|^2 + |OD|^2}$.

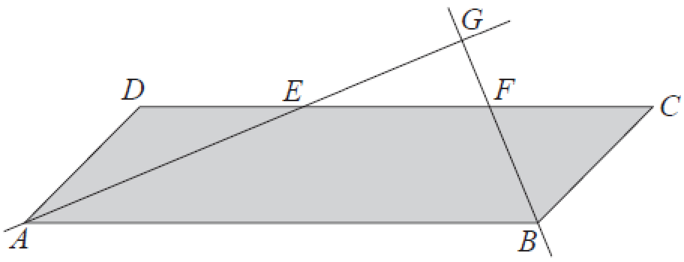
8.5 Dany jest trójkąt ABC, w którym bok BC jest dwa razy dłuższy od boku AB, a kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC. Pokaż, że $|AC|^2 = 6|AB|^2$.

8.6 Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu długości 4. Oblicz obwód czworokąta, wiedząc, że kąt ADC ma miarę $120°$ oraz $|AB| = |CB|$ i $|CD| = 2|AD|$.

8.7 W prostokącie $ABCD$ tangens kąta BAC jest równy $\frac{3}{4}$. Prostokąt $EFGH$ jest podobny do prostokąta $ABCD$. Pole prostokąta $ABCD$ jest o 36 większe od pola prostokąta $EFGH$, natomiast obwód prostokąta $ABCD$ jest o 14 większy od obwodu prostokąta $EFGH$. Wyznacz skalę podobieństwa tych prostokątów.

8.8 Pole prostokąta jest dwa razy mniejsze niż pole koła opisanego na tym prostokącie. Wyznacz stosunek długości boku dłuższego do krótszego w tym prostokącie.

8.9 W równoległoboku $ABCD$, w którym kąt ostry BAD ma miarę α, dwusieczne kątów BAD i CBA przecinają się w punkcie G. Dwusieczna kąta BAD przecina bok CD w punkcie E oraz dwusieczna kąta CBA przecina bok CD w punkcie F (zobacz rysunek). Ponadto $|AB| = a$ oraz $|BC| = b$, gdzie $a > 2b$. Wykaż, że obwód trójkąta EFG jest większy od $(a - 2b)\left(1 + \sqrt{2\sin(\alpha)}\right)$.



8.10 Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od prostych zawierających jego boki jest większa od długości średnicy okręgu wpisanego w ten trójkąt.

8.11 W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Długość wysokości CD, długość środkowej CE i długość przeciwprostokątnej AB tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny o iloczynie wyrazów równym 64. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w trójkąt CDE do pola koła opisanego na trójkącie ABC.

8.12 Przekątna równoległoboku o długości d dzieli jego kąt rozwarty na dwa kąty o miarach α i β. Wyznacz długości boków tego równoległoboku.

8.13 Który z trapezów równoramiennych opisanych na okręgu o promieniu długości r ma najmniejsze pole? Wyznacz to pole.

9. PRAWDOPODOBIEŃSTWO

9.1 Instytut meteorologii przewiduje burzę z dokładnością 99,9%. Radar metereologiczny wykrywa burzę z prawdopodobieństwem 0,9. Co najmniej ile radarów meteorologicznych pracuje dla instytutu meteorologii?

9.2 Niech a_n oznacza sumę wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez 3 i mniejszych bądź równych $3n$. Natomiast b_n oznacza sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 i mniejszych bądź równych $3n$. Wyznacz granicę ilorazu a_n przez b_n przy n dążącym do nieskończoności. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku szukanej granicy.

9.3 Spośród wszystkich liczb naturalnych większych od 4000 i mniejszych od 6000 losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to liczba parzysta, w której co najmniej jedna cyfra jest piątką? Zakoduj pierwszą, drugą, trzecią i czwartą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

9.4 W urnie jest 9 kul, w tym n białych. Losujemy kolejno bez zwracania trzy kule. Ile było kul białych w urnie, jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul białych jest równe $\frac{2}{3}$?

9.5 Niech A i B będą zdarzeniami takimi, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Zakoduj pierwszą, drugą i trzecią cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $P(A|B)$.

9.6 W urnie są cztery białe kule i pewna liczba kul czarnych. Z urny losujemy dwie kule. Prawdopodobieństwo, że będą to obie kule czarne, jest równe $\frac{1}{7}$. Oblicz, ile kul czarnych znajduje się w urnie.

9.7 Ile można utworzyć liczb pięciocyfrowych, w zapisie których tylko cyfry pierwsza, trzecia i piąta są identyczne?

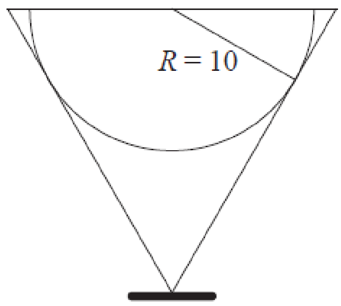
9.8 Wiedząc, że zdarzenia $A, B \subset \Omega$ i $P(A) = 0{,}4$ i $P(A \mid B) = 0{,}1$ i $P(B \mid A) = 0{,}2$, to $P(B)$ jest równe

9.9 Spośród liczb całkowitych należących do przedziału $(2; 12)$ wylosowano jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest parzysta lub większa od 8. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

9.10 Ze zbioru funkcji $f(x) = ax^2 + b$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle -10; 5\rangle$, losujemy jedną funkcję. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania funkcji, która ma miejsce zerowe. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

10. STEREOMETRIA

10.1 Rzemieślnik ma wykonać kopię historycznego kielicha na podstawie rysunku. Jakie powinny być jego wymiary, jeśli wiadomo, że objętość naczynia jest najmniejsza z możliwych? Wyznacz tę objętość.



10.2 Dany jest ostrosłup $ABCDS$, którego podstawą jest kwadrat $ABCD$. Długość krawędzi podstawy jest równa długości krawędzi bocznej i jest równa a. Punkty E i F są środkami krawędzi CS i DS, odpowiednio. Oblicz pole czworokąta $ABEF$.

10.3 W graniastosłupie prostym, który w podstawie ma trójkąt równoramienny o ramieniu długości a, pole powierzchni dwóch przystających ścian bocznych jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Wykaż, że wysokość tego graniastosłupa jest nie większa od $\frac{1}{2}a$.

10.4 Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o kątach miary α i β. Każda z krawędzi bocznych ostrosłupa ma długość d i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze γ. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

10.5 Ze zbioru prostopadłościanów o przekątnej długości d i o podstawie prostokąta, których długości boków są w stosunku 2 : 4, wyznacz wymiary tego prostopadłościanu, który ma największą objętość.